

1^{ère} partie :
Conducteurs en équilibre électrostatique

1.1 Relations générales

1.1.1 Théorème de Gauss

1.1.1.1 le flux sortant du champ électrostatique à travers toute surface fermée Σ est égale au quotient par ϵ_0 de la charge totale intérieure à Σ

1.1.1.2 le champ intérieur de tout conducteur du système est nul.

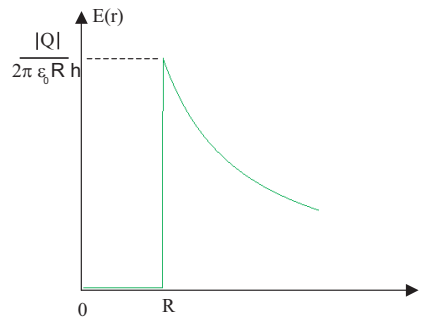
1.1.2 Conducteur cylindrique chargé

1.1.2.1 le conducteur en équilibre ne peut porter de charges qu'en sa surface : $\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 h}$
Rq : l'hypothèse $h \gg R$ permet de négliger la charge portée par les bases

1.1.2.2 tout plan contenant Oz est un plan de symétrie du conducteur chargé, ainsi que tout plan \perp à Oz donc $\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$.

le conducteur est invariant par translation et par rotation selon Oz donc $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$

1.1.2.3 par le thm de GAUSS : $\begin{cases} 2\pi r h E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} & r > R_1 \\ 2\pi r h E(r) = 0 & r < R_1 \end{cases} \Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} & r > R_1 \\ 0 & r < R_1 \end{cases}$



1.1.2.4 $E(r = R_1^+) = \frac{Q}{2\pi R_1 h \epsilon_0}$ et $E(r = R_1^-) = 0$, on retrouve la relation de passage (de continuité) du champ électrostatique : $E(r = R_1^+) - E(r = R_1^-) = \frac{Q}{2\pi R_1 h \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

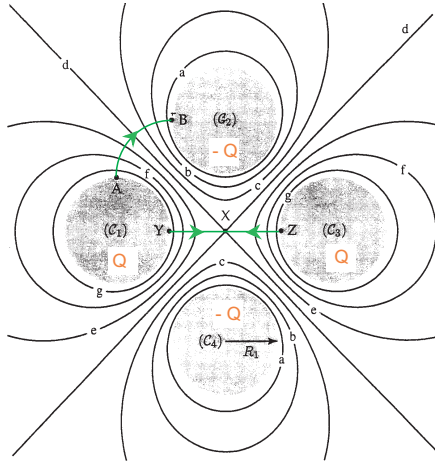
1.1.3 Quadripôle cylindrique

1.1.3.1 $\phi_d = 0$ par thm des valeurs intermédiaires suivant un segment joignant les centres de C_1 et C_2 , donc $\phi_c = -0.30kV < \phi_d < \phi_f = 0.60kV$

1.1.3.2 $\phi_e = -\phi_c = 0.30kV$, $\phi_b = -\phi_f = -0.60kV$ et $\phi_a = -\phi_g = -0.90kV$

1.1.3.3 $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q_1 = -Q$, $Q_3 = Q_1 = Q$ et $Q_4 = -Q_1 = -Q$

1.1.3.4 le champ \vec{E} est orthogonale aux équi-potentiels se dirigeant vers les potentiels décroissant :



1.1.3.5 au centre X : $\vec{E} = \vec{0}$ car intersection de deux équipotentielle orthogonales

1.1.3.6 voir figure

1.1.4 Condensateur cylindrique - Généralités

1.1.4.1 le théorème de GAUSS donne :

$$2\pi r h E(r) = \frac{Q_1 + Q_2'}{\epsilon_0}$$

pour $R_2 < r < R_2^{ext}$

or à l'intérieur du conducteur (C_2) on a : $E(r) = 0$

donc :

$$Q_2' = -Q_1$$

c'est l'influence totale

et par conservation de la charge de (C_2) : $Q_2' + Q_2^{ext} = Q_2 \Rightarrow Q_2 - Q_2^{ext} + Q_1 = 0$

1.1.4.2 Q_2^{ext} est répartie uniformément en surface externe sur (C_2), non

1.1.4.3 $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

1.1.4.4 $\vec{E} = -\text{grad} \phi$

1.1.4.5 en tout point M : $\Delta \phi + \rho / \epsilon_0 = 0$, en particulier en tout point compris entre (C_1) et (C_2) assimilable au vide $\Delta \phi = 0$, équation de Laplace

1.1.4.6 on a une symétrie cylindrique ($r > R_1$) : $\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{Q_1}{2\pi r h \epsilon_0}$

donc : $\phi(r) = -\frac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0} \ln r + cte$

or $\phi(r = R_1) = U$ d'où : $\phi(r) = \begin{cases} -\frac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0} \ln(\frac{r}{R_1}) + U & r > R_1 \\ U & r < R_1 \end{cases}$

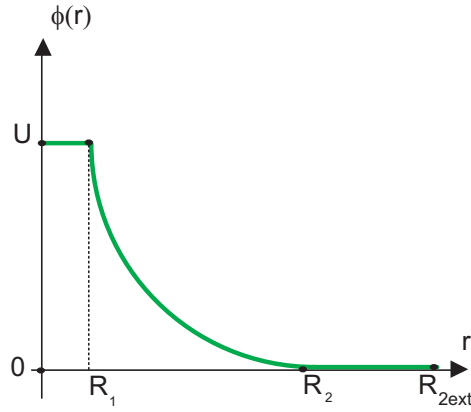
on a bien $\phi(r \rightarrow +\infty) = +\infty$ si $Q_1 > 0$

Ceci est du au fait que le cylindre chargé est une distribution à extension spatiale infinie

$\phi(C_1) = U$, le volume du conducteur est équi-potentiel

1.1.4.7 $\phi(C_2) = 0$, on a : $\phi(r) = a \ln r + b$, les conditions aux limites :

$$\phi(r) = U \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)} > 0$$



$Q_2^{ext} = 0$ puisque (C_2) est mis à la terre

1.1.4.8 $C = \frac{U_1 - U_2}{Q_1}$

1.1.4.9 on a : $E(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} = +\frac{U}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r}$ et par thm de Gauss : $E(r) = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{1}{r}$ donc :

$$Q_1 = U \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)} \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$$

1.1.4.10 $w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \begin{cases} 0 & r > R_2 \\ \frac{Q_1^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2} \frac{1}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r < R_1. \end{cases}$

donc :

$$W_e = \int \int \int w_e d\tau = 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2} \frac{1}{r^2} r dr = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{\frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}}$$

1.1.4.11 $C = \frac{W_e}{\frac{1}{2}Q_1^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$, on retrouve le résultat 1.1.4.9

$R_2 = R_1 + \delta R_1$ avec $\delta R_1 \ll R_1$.

1.1.4.12 $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(1 + \frac{\delta R_1}{R_1})} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\frac{\delta R_1}{R_1}} = \epsilon_0 \frac{2\pi h R_1}{\delta R_1}$

donc : $e = \delta R_1$ et $\Sigma = 2\pi h R_1$, on retrouve la limite du condensateur plan

1.2 Condensateur cylindrique en ARQS - Applications

1.2.1 Généralités

1.2.1.1 notons d la taille du circuit, dans l'ARQS la propagation est négligé :

$$T \gg \frac{d}{c_0} \Rightarrow \omega \ll \frac{2\pi c_0}{d}$$

1.2.1.2 les quatre équations de MAXWELL dans le cadre de l'ARQS :

$$\text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(M, t) \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{B}(M, t) = 0 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) \quad (4)$$

1.2.1.3 le thm de Gauss reste inchangé en ARQS, il suffit d'avoir aussi :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi \approx -\text{grad}\phi$$

ceci nécessite en régime harmonique d'avoir :

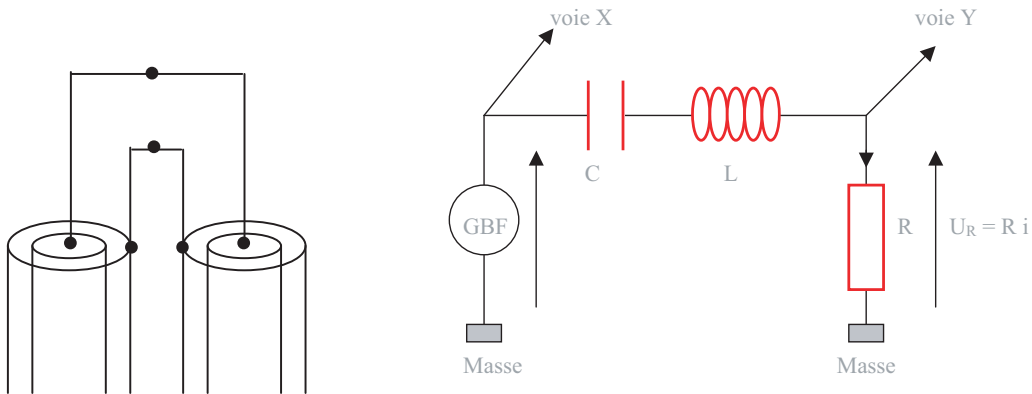
$$E \gg \omega A$$

ce qui revient à négliger le phénomène d'induction, sachant que $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est le champ électromoteur de Newmann

1.2.2 Capacité d'un câble coaxial

1.2.2.1 $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)} = 40 \text{ pF}$.

1.2.2.2 l'association parallèle (liaison int-int et ext-ext), $C_e = 2C = 80 \text{ pF}$



1.2.2.3 voir figure

1.2.2.4 on a :

$$\Delta\varphi = \varphi_g - \varphi_i = \text{Arg}\frac{U}{I} = \text{Arg}(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}) = \arctan\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$$

à la résonance d'intensité $\Delta\varphi = 0$

soit : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ d'où $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

1.2.2.5 hors résonance on obtient une ellipse, à la résonance on obtient un segment de droite.

1.2.2.6 si $R \nearrow$ la plage de fréquence $\Delta\nu$ pour laquelle $\Delta\varphi = \arctan\frac{L\omega-1/C\omega}{R} \approx 0$ est vaste d'où la mesure moins précise (résonance floue)

1.2.2.7 $\nu_0 = 80 \text{ kHz}$

1.3 Principe d'un capteur de force capacitif

1.3.1 Généralités

1.3.1.1 (Poisson) entre les armatures :

$$\frac{d^2V}{dx'^2} = 0$$

soit, par intégration :

$$V(x') = \frac{V_2 - V_1}{x} x' + V_1$$

d'où le champ :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx'} \vec{x}' = \frac{V_1 - V_2}{x} \vec{x}'$$

uniforme

thm de Coulomb au voisinage d'une armature :

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{x}$$

la charge sur cette armature :

$$Q_1 = \sigma_1 \Sigma = \varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{x} \Sigma$$

donc, la capacité :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x}$$

1.3.1.2 l'énergie électrique $E_e = \frac{1}{2}CU^2$

1.3.1.3 $\delta W_g = UdQ = U^2 dC$ car $U = cte$

1.3.2 Détection de force par déplacement

1.3.2.1 bilan d'énergie du condensateur :

$$dE_e = F_{op}\delta x + \delta W_g$$

1.3.2.2 le bilan s'écrit : ($U = cte$)

$$\frac{1}{2}U^2 dC = F_{op}\delta x + U^2 dC \Rightarrow F_{op} = -\frac{1}{2}U^2 \frac{dC}{\delta x} = \frac{1}{2}U^2 \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x^2} > 0$$

ce qui permet la mesure de F_{op} connaissant x et les autres données

1.3.2.3 on a : ($\Delta x > 0$)

$$W_{op} = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F_{op} \delta x = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Sigma U^2 \left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \Delta x} \right] > 0$$

le travail est moteur car il doit s'opposer aux forces d'attraction électrostatiques entre les deux armatures portant des charges opposées !

2^{ème} partie :

Oscillateur commandé en tension (OCT)

2.1 Fonctionnement de l'amplificateur opérationnel AO1

2.1.1 $i_B > 0$ le transistor relie à la masse la résistance $\frac{R}{2}$, on applique Millman (régime harmonique hypothétique) :

$$V^- = \frac{\frac{v_c}{R} + jC\omega v_{S1}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R/2} + jC\omega} = \frac{v_c + jRC\omega v_{S1}}{3 + jRC\omega}$$

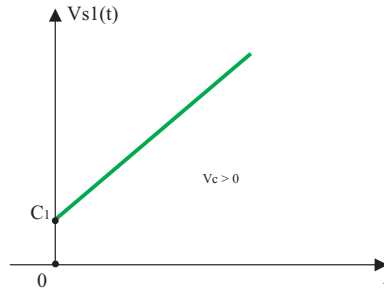
$$V^+ = \frac{\frac{v_c}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{v_c}{2}$$

AO1 est en fonctionnement linéaire car sa sortie est reliée à son entrée inverseuse :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow 2RC j\omega v_{S1} = v_c + jC\omega v_c \Rightarrow 2RC \frac{dv_{S1}}{dt} = v_c$$

la portion $E_1 - S_1$ du circuit réalise une intégration :

$$v_{S1} = \frac{1}{2RC} \int v_c dt = \frac{v_c}{2\tau} t + C_1$$



2.1.2 $i_B = 0$ le transistor est bloqué $i_T = 0$, on applique Millman (régime harmonique hypothétique) :

$$V^- = \frac{\frac{v_c}{R} + jC\omega v_{S1}}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{v_c + jRC\omega v_{S1}}{1 + jRC\omega}$$

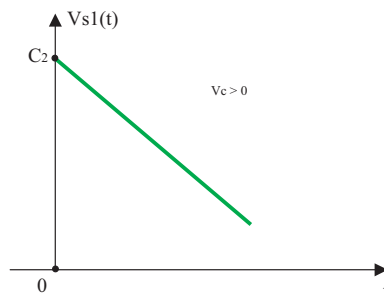
$$V^+ = \frac{\frac{v_c}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{v_c}{2}$$

fonctionnent linéaire :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow 2RC j\omega v_{S1} + v_c = jC\omega v_c \Rightarrow 2RC \frac{dv_{S1}}{dt} = -v_c$$

la portion $E_1 - S_1$ du circuit réalise une intégration-inversion :

$$v_{S1} = -\frac{1}{2RC} \int v_c dt = -\frac{v_c}{2\tau} t + C_2$$



2.2 Fonctionnement de l'amplificateur opérationnel AO2

2.2.1 AO2 fonctionne de manière saturée, car sa sa sortie est reliée à son entrée non inverseuse

2.2.2 $v_{S2} = \pm V_{sat}$

2.2.3 pour AO2 :

$$\varepsilon = V^+ - V^-$$

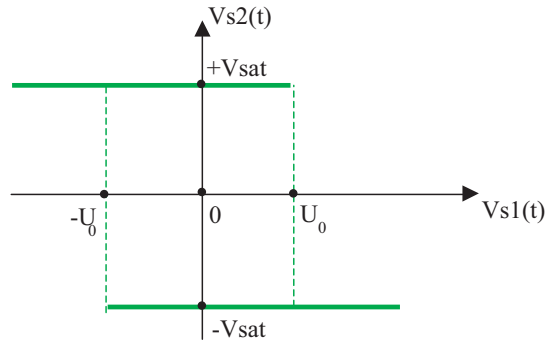
$$\text{or } V^- = v_{S1} \text{ et par Millman } V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{S2}$$

donc :

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{S2} - v_{S1}$$

1er cas : saturation positive : $v_{S2} = +V_{sat}$ et $\varepsilon > 0 \Rightarrow v_{S1} < +U_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$

2d cas : saturation négative : $v_{S2} = -V_{sat}$ et $\varepsilon < 0 \Rightarrow v_{S1} > -U_0 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$

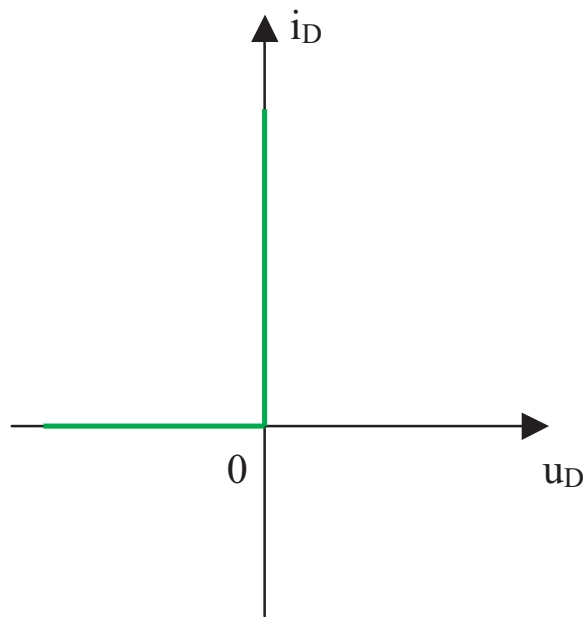


la portion $S_1 - S_2$ du montage est un comparateur-inverseur à double seuil. Un tel circuit est appelé comparateur à hystérésis (trigger de Schmitt)

2.2.4 v_{S2} bascule de V_{sat} à $-V_{sat}$ si $v_{S1} > U_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$ et v_{S2} bascule de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ si $v_{S1} < -U_0 = -\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$

2.3 Rôle de la diode D

2.3.1 :



2.3.2 la diode D sera bloquée, $i_D = 0$

alors $i_B = \frac{V_{cc}-U_S}{R_3} > 0$ ($15 > 0.6$)

le transistor T est saturé et relie la résistance $R/2$ à la masse

$$i_B = \frac{V_{cc}-U_S}{R_3} \approx \frac{V_{sat}}{R_3}$$

d'après 2.1.1 :

$$v_{S1}(t) = \frac{v_c}{2\tau}t + C_1$$

2.3.3 $u_D = 0$, la diode D conduit , $i_B = 0$

$i_D = \frac{V_{cc}}{R_3} > 0$, le transistor T est bloqué

d'après 2.2.2 :

$$v_{S1}(t) = -\frac{v_c}{2\tau}t + C_2$$

2.4 Signaux délivrés par l'OCT

2.4.1 d'après 2.3.2 le transistor T est saturé, or à $t = 0$ on a : $v_{S1}(0) = 0$

$$v_{S1}(t) = \frac{v_c}{2\tau}t$$

d'après 2.2.4 :

$$\frac{v_c}{2\tau}t > U_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_{sat}$$

donc :

$$t > t_1 = \frac{2\tau R_1 V_{sat}}{(R_1 + R_2)v_c} = \frac{2\tau}{v_c}U_0$$

Attention : v_c doit être positif!

2.4.2 le transistor T est bloqué pour $t > t_1$

$$v_{S1}(t) = -\frac{v_c}{2\tau}t + C_2$$

tq :

$$v_{S1}(t_1^+) = v_{S1}(t_1^-) = \frac{R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} = U_0$$

donc :

$$v_{S1}(t) = -\frac{v_c}{2\tau}(t - t_1) + U_0$$

$v_{S1}(t)$ est décroissante, donc d'après 2.2.4 :

$$-\frac{v_c}{2\tau}(t - t_1) + U_0 < -U_0$$

donc :

$$t > t_2 = t_1 + \frac{2\tau}{v_c}U_0 = 2t_1$$

2.4.3 voir figure

2.4.4 la période $T = 4t_1 = \frac{8\tau}{v_c}U_0 = \frac{8\tau R_1 V_{cc}}{(R_1 + R_2)v_c}$

et

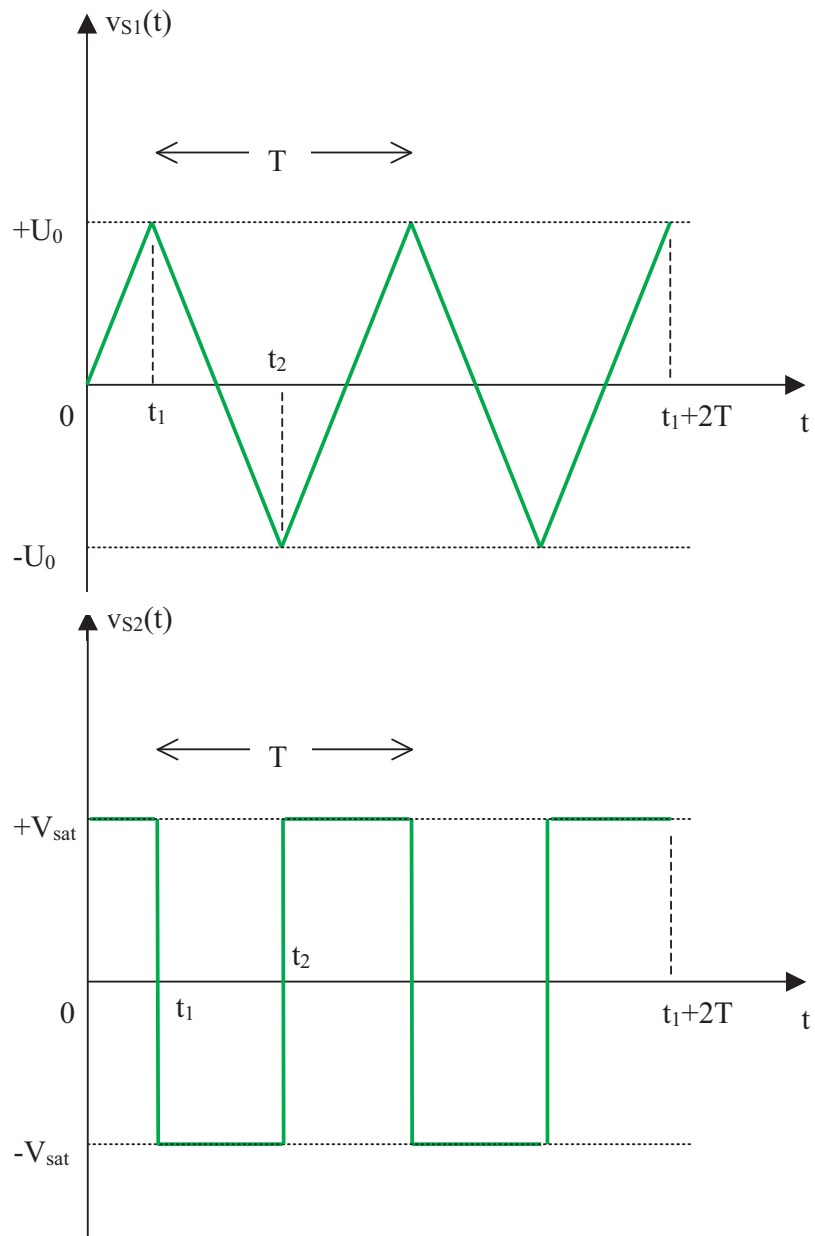
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{(R_1 + R_2)}{8\tau R_1 V_{cc}} v_c$$

commandée bel et bien de façon linéaire par v_c !

2.4.5 Application numérique : $R_1 = R_2$, $R = 10k\Omega$, $C = 500pF$ et $v_c = 0,1V$.

la fréquence $\nu = 333 Hz$

2.5 modulation de fréquence FM!



fin du corrigé